



SÈRIE 4

1.

- a) Si anomenen x el preu de l'article A, y el preu de l'article B i z el de l'article C, tenim la primera equació a partir del cost dels tres articles abans de les vacances de Nadal $x + y + z = 135$.

D'altra banda, podem resumir la informació de l'estalvi per cada tipus d'article i el nombre d'unitats que compra l'Ares en la taula següent

Estalvi per article/ nombre d'unitats que compra l'Ares	Article A		Article B		Article C	
Primeres rebaixes	0,04	1	0,06	2	0,05	3
Segones rebaixes	0,08	3	0,10	1	0,06	5

En les primeres rebaixes compra 1 unitat de tipus A, 2 de tipus B i 3 de tipus C i s'estalvia 16 euros, que correspon a l'equació $0,04x + 0,12y + 0,15z = 16$.

En les segones rebaixes compra 3 unitats de tipus A, 1 de tipus B i 5 de tipus C i s'estalvia 29 euros, que correspon a l'equació $0,24x + 0,10y + 0,30z = 29$.

- b) Per resoldre el sistema plantejem el sistema sense decimals multiplicant la segona i tercera equació per 100, i dividim la tercera per 2. Obtenim el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 135 \\ 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \end{cases}$$

i el podem resoldre aplicant el mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 4 & 12 & 15 & 1600 \\ 12 & 5 & 15 & 1450 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & 8 & 11 & 1060 \\ 0 & -7 & 3 & -170 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & 8 & 11 & 1060 \\ 0 & 0 & 101 & 6060 \end{array} \right)$$

Obtenim com a solució $z = 60$, $y = 50$ i $x = 25$. Per tant, el preu de l'article de tipus A abans de les rebaixes era de 25 euros, el de tipus B era de 50 euros i el de tipus C era de 60 euros.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada equació correcta.
- b) Procediment de resolució: 0,75 punts. Trobar el valor correcte de x , y i z : 0,75 punts. Explicitar la solució final: 0,25 punts.



2.

- a) Considerem els esdeveniments

D = la bicicleta té algun tipus de problema que requereix del servei post-venda.

M = la bicicleta és manual.

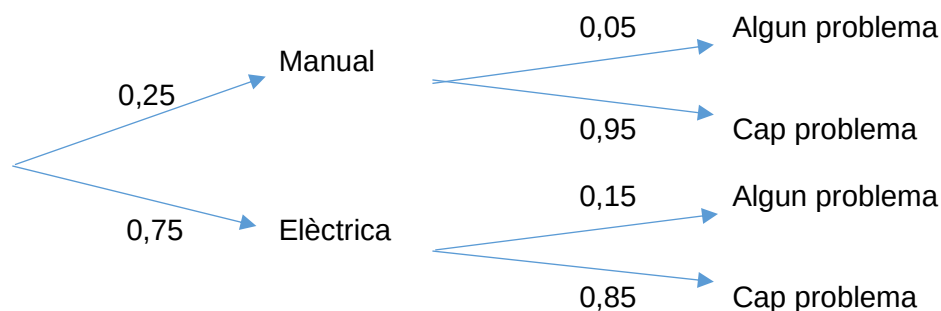
E = la bicicleta és elèctrica.

De l'enunciat del problema sabem que $P(M) = 0,25$ i $P(E) = 0,75$. Sabem també que $P(D|M) = 0,05$ i $P(D|E) = 0,15$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap E) = P(M) \cdot P(D|M) + P(E) \cdot P(D|E) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,75 \cdot 0,15 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

També ho podem plantejar mitjançant un diagrama d'arbre



Així doncs, la probabilitat que la bicicleta tingui algun tipus de problema que requereixi el servei post-venda és de 0.125.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que la bicicleta sigui elèctrica si sabem que ha tingut algun tipus de problema que ha requerit el servei post-venda. Per tant,

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D|E)}{P(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,15}{0,125} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Si sabem que la bicicleta ha tingut algun tipus de problema que ha requerit el servei post-venda la probabilitat que es tracti d'una bicicleta elèctrica és de 0.9.

- b) La mida de la mostra és $n = 100$. L'estimació puntual de la proporció de bicicletes que han requerit la revisió del servei post-venda és de $p = \frac{8}{100} = 0,08$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula



$$\left[\hat{p} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_{\gamma} \leq Z \leq z_{\gamma}) = \gamma$.
Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,08 - 1,96 \sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{100}} = 0,0268$$

i

$$\hat{p} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,08 + 1,96 \sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{100}} = 0,1332.$$

L'interval de confiança demanat és $[0,0268, 0,1332]$. Per tant, amb una confiança del 95% sí que podem afirmar que el percentatge ha millorat respecte a l'històric del 15%. Sabem que, actualment, el percentatge de bicicletes elèctriques que requereixen del servei post-venda està entre el 2,6% i el 13,3% amb una confiança del 95%.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0.25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0.5 punts.
- b) Càlcul de la proporció mostral: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta del que podem afirmar a partir del resultat: 0.25 punts.



3.

- a) A l'inici de l'estudi hi havia 50 microorganismes, és a dir, 5 desenes. Per tant, tenim que $f(0) = 5$. Resolem l'equació:

$$\frac{15 \cdot 0}{9 + 0^2} + k = 5$$

i obtenim que $k = 5$.

Busquem ara els extrems relatius de la funció. Comencem calculant la derivada

$$f'(x) = \frac{15 \cdot (9 + x^2) - 15x \cdot 2x}{(9 + x^2)^2} = \frac{135 - 15x^2}{(9 + x^2)^2}$$

igualem la derivada a zero i obtenim

$$135 - 15x^2 = 0.$$

L'equació de segon grau té dues solucions $x = 3$ i $x = -3$. La solució que pertany al domini de definició de la nostra funció és $x = 3$. Estudiarem el signe de la derivada abans i després $x = 3$ i veiem que

- $f'(x) > 0$ per valors $0 \leq x < 3$
- $f'(x) < 0$ per valors $3 < x < +\infty$.

Veiem que al punt $x = 3$ la funció passa de créixer a decreixer i, per tant, hi trobem un màxim.

Calculem ara el valor de la funció en $x = 3$:

$$f(3) = \frac{15 \cdot 3}{9 + 3^2} + 5 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Per tant, la població màxima s'assolirà a les 3 hores d'iniciar l'estudi i serà de 7,5 desenes, és a dir de 75 microorganismes.

- b) Per saber a quin nombre s'estabilitzarà la població de microorganismes de l'estudi hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x}{9 + x^2} + 5 = 0 + 5 = 5.$$

A llarg termini acabarem tenint 5 desenes de microorganismes, és a dir, 50 microorganismes.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Obtenció del valor de k : 0,5 punts. Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Comprovació de que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Obtenció del nombre màxim de microorganismes: 0,25 punts.
- b) Plantejament del límit: 0,25 punts. Càlcul del límit: 0,5 punts.



4.

OPCIÓ A

a) Definim la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 & 1 \\ 3,5 & 1 & 0,7 \\ 2,5 & 0,8 & 0,9 \end{pmatrix}$$

en què cada fila representa el primer, segon i tercer proveïdor, respectivament, i les columnes representen el preu de l'oli, de la farina i la sal, respectivament.

I la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix}$$

que representa la quantitat que l'empresa vol comprar de cada matèria. La primera fila és la quantitat d'oli en litres, i la segona i tercera la quantitat de kg de farina i sal, respectivament.

Si multipliquem les dues matrius obtenim el preu de cada proveïdor per aquesta comanda:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 & 1 \\ 3,5 & 1 & 0,7 \\ 2,5 & 0,8 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1345 \\ 1767,5 \\ 1332,5 \end{pmatrix}$$

Per tant, el cost total de la comanda és de 1345€ pel primer proveïdor, 1767,5€ pel segon i 1332,5€ pel tercer. El proveïdor més econòmic per aquesta comanda concreta és el tercer.

b) Considerem x el nombre de cops que s'apuja el preu del paquet de pasta en 0,01 euros.

Sabem que el cost de producció d'un paquet de pasta és de 0,5 euros. Per tant, si el preu de venda és de 1,1 euros, el benefici és de $1,1 - 0,5 = 0,6$ euros. I, a aquest preu, en venem 1000 paquets.

Si apugem el preu de venda $0,01x$ euros, el benefici serà de $0,6 + 0,01x$ euros i el nombre de paquets venuts serà de $1000 - 10x$.

La funció del benefici diari total és per tant

$$B(x) = (0,6 + 0,01x)(1000 - 10x) = -0,1x^2 + 4x + 600.$$

Per trobar el benefici màxim calculem la derivada $B'(x)$ i la igulem a zero.

$$B'(x) = -0,2x + 4 \rightarrow -0,2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{0,2} = 20.$$

Aquest valor és un màxim ja que $B'(x) > 0$ per valors de $x < 20$ i $B'(x) < 0$ per valors de $x > 20$.



El benefici màxim s'obtindria amb una pujada de preu de 0,2 € i seria de $B(20) = 640$ €. El preu unitari del paquet per obtenir aquest benefici màxim seria de 1,3 €.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Escriure les matrius: 0,25 punts cadascuna. Càlcul del producte de matrius: 0,5 punts. Obtenció del proveïdor que resulta més econòmic: 0,25 punts.
- b) Obtenció de la funció que dona el benefici en funció de x : 0,5 punts. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim i justificació de que és un màxim: 0,25 punts. Càlcul del benefici màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu de venda del paquet per obtenir el benefici màxim: 0,25 punts.



OPCIÓ B

- a) Considerem les següents incògnites
 x : nombre de litres d'oli que ha comprat la fàbrica.
 y : nombre de kg de farina que ha comprat la fàbrica.
 z : nombre de kg de sal que ha comprat la fàbrica.

A partir de l'enunciat trobem les següents equacions

$$\begin{cases} 3x + 0,6y + z = 1320 \\ y = 3z \\ 0,6y = 0,3 \cdot 3x \end{cases}$$

Multiplicant la primera i la tercera equació per 10 arribem al sistema

$$\begin{cases} 30x + 6y + 10z = 13200 \\ y - 3z = 0 \\ 6y = 9x \end{cases}$$

Si ara dividim per 2 la primera equació i per tres la tercera arribem al sistema

$$\begin{cases} 15x + 3y + 5z = 6600 \\ y - 3z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 3 & 5 & 6600 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 3 & 5 & 6600 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -13 & -5 & -6600 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 3 & 5 & 6600 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -6600 \end{array} \right)$$

Per tant;

$$-44z = -6600 \Leftrightarrow z = 150$$

$$y - 3z = 0 \Leftrightarrow y = 3 \cdot 150 = 450$$

$$15x = 6600 - 3y - 5z \Leftrightarrow x = \frac{1}{15}(6600 - 3 \cdot 450 - 5 \cdot 150) = 300$$

La fàbrica ha comprat 300 litres d'oli, 450 kg de farina i 150 kg de sal.

- b) Per trobar l'interval de confiança calcularem primer la mitjana de la mostra

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(501 + 506 + \dots + 499) = 501g$$

A més a més, per l'enunciat sabem que $n = 9$, $z_\gamma = 1,96$ i $\sigma = 4$.

Per tant, l'interval és:

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[501 - 1,96 \frac{4}{\sqrt{9}}, 501 + 1,96 \frac{4}{\sqrt{9}} \right] = [498'39, 503'61]$$

Amb una confiança del 95%, no podem afirmar que els paquets de pasta estiguin mal etiquetats ja que 500 g pertany a aquest interval.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejar el sistema d'equacions: 0,25 punts per cada equació. Resolució i obtenció del resultat final: 0,5 punts.
- b) Càlcul de la mitjana: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta del que podem afirmar a partir del resultat: 0.25 punts.