



SÈRIE 1

1.

- a) Si anomenem respectivament x , y i z els preus de les habitacions individual, doble i triple, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 702 \\ x + 3z = 2y + 2z \end{cases}$$

Obtenim, per tant,

$$\begin{cases} 6x + 2y = 702 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 351 - 3x \\ z = 2y - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 351 - 3x \\ z = 702 - 7x \end{cases}$$

Per tant, si anomenem x el preu de l'habitació individual, l'habitació doble valdrà $351 - 3x$ i la triple $702 - 7x$.

- b) Amb la nova informació sabem que $z = 2x$. Per tant, igualant al valor de z que hem trobat abans, obtenim que $2x = 702 - 7x$, és a dir, $9x = 702$ i, per tant, el preu de l'habitació individual serà $x = 78$ euros. L'habitació doble valdrà $y = 351 - 3 \cdot 78 = 117$ euros i la triple $z = 2 \cdot 78 = 156$ euros.

Sabíem que si reservàvem 6 habitacions individuals i dues de dobles havíem de pagar 702 euros. Si en reservem una d'individual i tres de triples haurem de pagar $78 + 3 \cdot 156 = 546$ euros. Si en reservem dues de dobles i dues de triples haurem de pagar també $2 \cdot 117 + 2 \cdot 156 = 546$ euros.

Per tant, entre aquestes opcions, el preu mínim per allotjar les 10 persones és de 546 euros, i l'obtenim tant si reservem una habitació individual i tres de triples com si reservem dues habitacions dobles i dues de triples.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Escriure el sistema: 0,25 punts per equació correcta. Procediment de resolució: 0,25 punts. Trobar el valor correcte de y i de z en funció de x : 0,5 punts.
- b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Obtenció del preu dels tres tipus d'habitació: 0,75 punts. Trobar el preu mínim que cal pagar: 0,25 punts.



2.

- a) En primer lloc, hem de calcular el valor de la inversió a l'inici del dia, és a dir, quan $x = 0$. Observem que $f(0) = 250$; per tant, el valor inicial és de 250 euros. Al final del dia, quan $x = 24$ el valor de la inversió és de $f(24) = 1978$ euros. Per tant, durant el dia ha tingut un benefici de $1978 - 250 = 1728$ euros.

Per saber en quin instant del dia s'assoleix el valor màxim, comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(x) = x^2 - 35x + 300$$

Si igualem la derivada a zero obtenim $x = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2}$; és a dir, tenim dues solucions $x = 15$ i $x = 20$. Per veure si són màxims o mínims relatius, podem estudiar el signe de la derivada. Veiem que

- $f'(x) > 0$ per $0 \leq x < 15$; per tant, aquí la funció és creixent.
- $f'(x) < 0$ per $15 < x < 20$; per tant, aquí la funció és decreixent.
- $f'(x) > 0$ per $20 < x \leq 24$; per tant, aquí la funció és creixent.

Obtenim, per tant, que la funció té un màxim relatiu en $x = 15$ i un mínim relatiu en $x = 20$.

L'instant en què la inversió assolirà el valor màxim és el màxim absolut de la funció $f(x)$ en el domini en què està definida $x \in [0, 24]$. A partir dels intervals de creixement i decreixement que hem obtingut, aquest màxim absolut només es podrà assolir o bé en el màxim relatiu $x = 15$ o bé en l'extrem superior de l'interval de definició $x = 24$.

Observem que $f(15) = 1937,5$; per tant, l'instant en què s'assoleix el màxim és al final del dia i aquest valor màxim és de $f(24) = 1978$ euros.

- b) Per saber l'instant en què el valor de la inversió ha estat mínim, a partir de l'estudi que hem fet dels intervals de creixement i decreixement de la funció, hem de comprovar el valor de la inversió en l'instant en què s'assoleix el mínim relatiu i en l'instant inicial. Observem que en $x = 20$ el valor de la inversió és de $f(20) = 1916,67$ euros.

Per tant, el mínim absolut s'assoleix en l'instant inicial $f(0) = 250$ euros, i, en particular, no hi ha cap instant en què el valor de la inversió hagi estat negatiu.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Obtenció del valor inicial: 0,25 punts. Càlcul dels beneficis al llarg del dia: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Trobar els punts on s'assoleixen els extrems relatius: 0,25 punts. Obtenció del màxim absolut i del valor màxim: 0,5 punts.
- b) Obtenció del mínim absolut i del valor mínim: 0,5 punts. Justificar que en cap moment la inversió ha estat negativa: 0,5 punts.



3.

- a) Anomenem X la variable "pes de la vaca". Ens demanen que calculem la $P(531 \leq X \leq 629)$. Sabem que X segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 580$ i desviació típica $\sigma = 25$. Per tant, $Z = \frac{X-580}{25}$ segueix una distribució normal $(0,1)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(531 \leq X \leq 629) &= P\left(\frac{531 - 580}{25} \leq \frac{X - 580}{25} \leq \frac{629 - 580}{25}\right) \\ &= P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95. \end{aligned}$$

Per tant, la probabilitat que el pes de la vaca estigui entre aquests dos valors és de 0,95.

- b) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 581,4$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 25$.

L'interval de confiança per a la mitjana d'una variable normal amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$, quan la variància σ^2 és coneguda, s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581,4 - 1,96 \frac{25}{\sqrt{10}} = 565,9048$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581,4 + 1,96 \frac{25}{\sqrt{10}} = 596,8952.$$

L'interval de confiança demanat és $[565'9048, 596'8952]$.

A partir del resultat anterior no podem afirmar, amb una confiança del 95%, que el pes de les vaques hagi canviat perquè el valor 580 està dins de l'interval que hem obtingut.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejament correcte del problema: 0,5 punts. Obtenció del resultat: 0,5 punts.
- b) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,25 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta de que no podem afirmar que el pes hagi canviat: 0,5 punts.



4.

OPCIÓ A

a) Considerem els esdeveniments

A = la persona inscrita al congrés és una dona

U = la persona inscrita al congrés és docent d'universitat

S = la persona inscrita al congrés és docent de secundària

I = la persona inscrita al congrés és docent d'infantil o primària

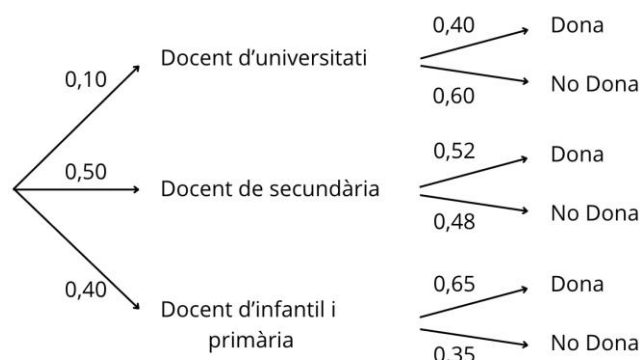
De l'enunciat del problema sabem que $P(U) = 0,1$, $P(S) = 0,5$ i $P(I) = 0,4$.

Sabem també que $P(A|U) = 0,4$, $P(A|S) = 0,52$ i $P(A|I) = 0,65$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(A) = P(A \cap U) + P(A \cap S) + P(A \cap I) = P(U) \cdot P(A|U) + P(S) \cdot P(A|S) + P(I) \cdot P(A|I) = 0,1 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,52 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,56.$$

També es pot resoldre el problema a través d'un diagrama d'arbre



i realitzaríem el mateix càlcul. Així doncs, la probabilitat que sigui una dona és de 0,56.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que la persona inscrita sigui docent de secundària si sabem que és una dona. Per tant,

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S) \cdot P(A|S)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,52}{0,56} = 0,4643.$$

Així doncs, si escollim una dona inscrita a l'atzar, la probabilitat que sigui docent de secundària és de 0,4643.

b) Considerem les variables:

x : nombre de docents inscrits universitaris

y : nombre de docents inscrits de secundària

z : nombre de docents inscrits d'infantil i primària



Traduïm la informació de l'enunciat en equacions:

- El total de dones és 476: $0,4x + 0,52y + 0,65z = 476$.
- El 10% del total són docents d'universitat: $0,10(x + y + z) = x \rightarrow -0,9x + 0,1y + 0,1z = 0$.
- El 50% del total són docents de secundària: $0,50(x + y + z) = y \rightarrow 0,5x - 0,5y + 0,5z = 0$.

Si simplifiquem l'última equació i reordenem, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -0,9x + 0,1y + 0,1z = 0 \\ 0,4x + 0,52y + 0,65z = 476 \end{cases}$$

El podem resoldre aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -0,9 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,52 & 0,65 & 476 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0,92 & 0,25 & 476 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 476 \end{array} \right)$$

I obtenim $x = 85$, $y = 425$ i $z = 340$

Per tant, hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Alternativament, també es pot resoldre l'exercici utilitzant l'apartat anterior. Sabem que la probabilitat que una persona inscrita sigui una dona és $P(A) = 0,56$. D'altra banda, si anomenem n el nombre d'inscrits, aquesta probabilitat també és igual a $P(A) = \frac{476}{n}$. D'aquí deduïm que hi ha $n = \frac{476}{0,56} = 850$ persones inscrites. Si apliquem que el 10% són docents universitaris, el 50% de secundària i la resta d'infantil i primària, obtenim que hi ha 85 docents universitaris, 425 de secundària i 340 d'infantil i primària.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Assignació d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que sigui una dona: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que si escollim una dona sigui docent de secundària: 0,5 punts.
- b) Plantejament de les equacions del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema i solució final: 0,5 punts.

Si han utilitzat la resolució alternativa: 0,5 punts per obtenir el nombre total d'inscrits i 0,75 punts per obtenir el nombre d'inscrits de cada tipus.



OPCIÓ B

- a) Les previsions de l'organització són que al congrés hi acabin assistint 1000 persones, segons els percentatges de l'enunciat tindrem la distribució següent:
- Nombre de docents d'universitat: 10% de 1000 = 100
 - Nombre de docents de secundària: 50% de 1000 = 500
 - Nombre de docents d'infantil i primària: 40% de 1000 = 400

Així, els organitzadors hauran de comprar 100 detalls del tipus D1, 500 detalls del tipus D2 i 400 detalls del tipus D3.

Fent el següent producte de matrius, s'obté el preu de tots els detalls per a cada empresa

$$\begin{pmatrix} 100 & 500 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0,75 & 1 & 1,15 \\ 1 & 0,85 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 940 & 1020 \end{pmatrix}$$

Per tant, a l'empresa E1, els detalls costarien 900 €; a l'empresa E2, costarien 940 €, i a l'empresa E3, costarien 1020 €. L'empresa que ofereix el millor preu és l'empresa E1 amb un preu de 900 €.

- b) Sigui x , el nombre de vegades que s'aplica el descompte d'1 €. L'estudi es fa a partir de la hipòtesi que amb un preu de 80 euros es reservarien 100 habitacions dobles i que per cada euro que rebaixem el preu es reserven dues habitacions més.

La funció que dona els ingressos és el producte entre el preu de l'habitació doble i el nombre d'habitacions dobles reservades. Per tant, tenim

$$I(x) = (80 - x)(100 + 2x) = -2x^2 + 60x + 8000.$$

Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:

$$I'(x) = -4x + 60.$$

Iguallem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 15$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 15$ i és negativa per a $x > 15$.

Per tant, el preu de l'habitació doble per maximitzar els ingressos ha de ser de $80 - 15 = 65$ €.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejar el producte de matrius: 0,25 punts. Realitzar el producte de matrius: 0,5 punts. Trobar l'empresa que ofereix el millor preu: 0,25 punts. Trobar el millor preu: 0,25 punts.
- b) Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x : 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'habitació doble amb el qual els ingressos són màxims: 0,25 punts.