

## Problema 1

Un ordinador personal té operatius dos programes antivirus  $A_1$  i  $A_2$  que actuen simultàniament i de forma independent. Davant la presència d'un virus, el programa  $A_1$  el detecta amb una probabilitat de 0.9 i el programa  $A_2$  el detecta amb una probabilitat de 0.8. Calculeu de forma raonada:

- La probabilitat que un virus qualsevol sigui detectat. (1 punt)
- La probabilitat que un virus sigui detectat pel programa  $A_1$  i no per  $A_2$ . (0,75 punts)
- Si un virus ha estat detectat, quina és la probabilitat que l'hagi detectat l'antivirus  $A_1$ ? (0,75 punts)

Considerem els esdeveniments:

$A_1$  = el virus és detectat per l'antivirus  $A_1$

$A_2$  = el virus és detectat per l'antivirus  $A_2$

Sabem que  $P(A_1) = 0.9$  i  $P(A_2) = 0.8$ .

- La probabilitat que un virus sigui detectat correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Com que els dos antivirus actuen de forma independent la probabilitat de la intersecció serà el producte de probabilitats:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.9 + 0.8 - 0.72 = 0.98$$

Així doncs, la probabilitat que el virus sigui detectat és de 0.98.

- Ara ens demanen

$$P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c) = 0.9 \cdot (1 - 0.8) = 0.18$$

La probabilitat que el virus sigui detectat per  $A_1$  i no per  $A_2$  és de 0.18.

- Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que un virus hagi estat detectat per l'antivirus  $A_1$  si sabem que ha estat detectat:

$$P(A_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0.9}{0.98} = 0.9184$$

La probabilitat que ens demanen és de 0.9184.

Puntuació: a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0,25, fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25, càlcul de la probabilitat de la intersecció: 0,25, resultat de l'apartat: 0,25. b) Plantejament: 0.5, resultat: 0.25. c) Plantejament: 0.5, resultat: 0.25.

## Problema 2

En un poble hi ha dos instituts que anomenarem A1 i A2. En tots dos instituts es pot estudiar el batxillerat científic (que anomenarem B1) o l'humanístic (que anomenarem B2). Seleccionem un alumne a l'atzar i se sap que la probabilitat que pertanyi a l'institut A1 és de 0.3, la probabilitat que pertanyi a l'institut A2 és de 0.7. D'altra banda, la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A1 és de 0.55 mentre que la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A2 és de 0.59.

- a) Quina és la probabilitat que l'alumne estudiï el batxillerat científic? (1.25 punts)
- b) Quina és la probabilitat que estudiï a l'institut A1 si sabem que estudia el batxillerat científic? (1.25 punts)

Considerem els esdeveniments:

$A_1$  = l'alumne estudia a l'institut A1

$A_2$  = l'alumne estudia a l'institut A2

$B_1$  = l'alumne estudia el batxillerat científic

$B_2$  = l'alumne estudia el batxillerat humanístic

Sabem que  $P(A_1) = 0.3$  i  $P(A_2) = 0.7$ . Sabem també que  $P(B_1|A_1) = 0.55$  i  $P(B_1|A_2) = 0.59$ .

- a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que  
 $P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2)$ .  
Per tant,

$$P(B_1) = 0.55 \cdot 0.3 + 0.59 \cdot 0.7 = 0.578.$$

La probabilitat que estudiï el batxillerat científic és de 0.578.

- b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0.55 \cdot 0.3}{0.578} = 0.2855.$$

La probabilitat que estudiï a l'institut A1 si sabem que estudia el batxillerat científic és de 0.2855.

Puntuació: a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5, fórmula de les probabilitats totals: 0,5, resultat de l'apartat: 0,25. b) Plantejament: 0.5, us correcte de la fórmula de Bayes: 0.5, resultat: 0.25.

## Problema 3

Els components electrònics produïts per una determinada empresa són defectuosos amb una probabilitat de 0.01. L'empresa ven els components en paquets de 10 i es compromet a retornar els diners si el paquet conté 2 o més

components defectuosos.

- a) Calculeu la probabilitat que et retornin els diners si compres un paquet de components. (1,25 punts)
- b) Una persona ha comprat 3 paquets de components, quina és la probabilitat que li retornin els diners de, com a mínim, un dels paquets? (1,25 punts)

Considerem

$p$  = probabilitat que un component electrònic sigui defectuós = 0.01

$n$  = nombre de components per paquet = 10

Considerem la variable aleatòria

$X$  = nombre de components defectuosos en un paquet.

Sabem que  $X$  segueix una distribució binomial de paràmetres  $p = 0.01$  i  $n = 10$ .

- a) Ens retornen els diners si el paquet conté dos o més components defectuosos. La probabilitat que això passi és

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 \\ &= 1 - 0.99^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 = 0.0043. \end{aligned}$$

La probabilitat que ens retornin els diners és de tan sols 0.0043.

- b) Sabem que de cada paquet ens retornen els diners amb una probabilitat de 0.0043. Comprem tres paquets i considerem la variable aleatòria  $Y$  = nombre de paquets, entre els 3, que ens retornaran els diners. Sabem que  $Y$  segueix una distribució binomial de paràmetres 3 i probabilitat d'èxit 0.0043. Per tant, la probabilitat demanada és

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0.0043^0 (1 - 0.0043)^3 \\ &= 1 - 0.9957^3 = 0.0128. \end{aligned}$$

La probabilitat que li retornin els diners de com a mínim un dels paquets és de 0.0128.

Puntuació: a) Identificació de la distribució binomial i dels paràmetres correctes: 0,75, resultat de l'apartat: 0,5. b) Identificació de la distribució binomial i dels paràmetres correctes: 0,75, resultat de l'apartat: 0,5.

## Problema 4

Volem conèixer el percentatge de persones que parlen anglès en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 500 persones de les quals resulta que 189 parlen anglès.

- a) Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que parlen anglès en aquella població. (1 punt)
- b) Escriviu un interval de confiança del 95% per al percentatge de persones que parlen anglès en aquella població. (Recordeu que si  $Z$  segueix una distribució *Normal* (0,1) la  $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ .) (1.5 punts)

a) La mida de la mostra és  $n = 500$ . L'estimació puntual de la proporció de persones que parlen anglès és

$$p = \frac{189}{500} = 0.378.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones que parlen anglès és de 0.378, és a dir, un 37.8%.

b) Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança  $\gamma \in (0,1)$  s'obté a partir de la fórmula

$$\left[ p - z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

en què, si  $Z$  segueix una distribució normal (0,1),  $P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$ . Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$p - z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.378 - 1.96 \sqrt{\frac{0.378(1-0.378)}{500}} = 0.3355$$

i

$$p + z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.378 + 1.96 \sqrt{\frac{0.378(1-0.378)}{500}} = 0.4205$$

L'interval de confiança demanat és [33.55%,42.05%], és a dir, el percentatge de persones que parlen anglès està entre el 33.55% i el 42.05% amb una confiança del 95%.

Puntuació: a) Càlcul de la proporció mostral: 1. b) Fórmula de l'interval de confiança per a la proporció: 0.75, resultat final: 0.75.

## Problema 5

Els envasos d'una marca determinada de iogurts indiquen que contenen de mitjana 150 grams de iogurt. Hem comprat deu iogurts, n'hem pesat el contingut i hem obtingut les dades següents (en grams):

148, 149, 147, 146, 149, 146, 149, 148, 149, 149.

- a) Construïu un interval de confiança del 95% per a la mitjana del pes dels iogurts, suposant que el pes segueix una distribució normal amb una desviació típica de 3 grams. (Recordeu que si  $Z$  segueix una distribució *Normal* (0,1) la  $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ .) (1.5 punts)
- b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior podem afirmar que la

informació que hi ha a l'etiqueta és errònia? Justifiqueu la resposta. (1 punt)

a) Tenim una mostra de mida  $n = 10$ . Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$x = 148.$$

D'altra banda sabem que la desviació típica és  $\sigma = 3$ .

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança  $\gamma \in (0,1)$ , quan la variància  $\sigma^2$  és coneguda s'obté a partir de la fórmula

$$\left[ x - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si  $Z$  segueix una distribució normal  $(0,1)$ ,  $P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$ .

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$x - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 148 - 1.96 \frac{3}{\sqrt{10}} = 146.1406$$

i

$$x + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 148 + 1.96 \frac{3}{\sqrt{10}} = 149.8594$$

L'interval de confiança demanat és  $[146.1406, 149.8594]$ .

b) A partir del resultat anterior podem afirmar, amb una confiança del 95%, que la informació de l'etiqueta és errònia. Ja que, a partir de la mostra, amb una confiança del 95%, la mitjana hauria d'estar entre 146.1406 i 149.8594 grams i, per tant, inferior als 150 grams que indica l'etiqueta.

Puntuació: a) Càlcul de la mitjana: 0.5, fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0.5, resultat final: 0.5. b) Justificació correcta: 1.

## Problema 6

Es vol saber la mitjana d'euros que es gasta setmanalment l'alumnat a la cafeteria de l'institut. S'ha seleccionat una mostra de 250 estudiants i se'ls ha demanat aquesta dada. En aquesta mostra hem obtingut una despesa mitjana de 5 euros, amb una desviació típica d'1,5.

Per resoldre aquest problema recordeu que si  $Z$  segueix una distribució Normal  $(0,1)$  la  $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$  i  $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$ .

- Construiu un interval de confiança del 95% per a la mitjana d'euros que es gasta setmanalment l'alumnat a la cafeteria. (1 punt)
- Construiu un interval de confiança del 99% per a la mitjana d'euros que es gasta setmanalment l'alumnat a la cafeteria. (1 punt)
- Expliqueu perquè els dos intervals anteriors són diferents i quina informació ens dona exactament cada un d'ells. (0.5 punts)

a) Tenim una mostra de mida  $n = 250$ . Sabem que l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra és  $x = 5$  i que la desviació típica mostrada és  $S = 1.5$ .

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança  $\gamma \in (0,1)$ , quan la variància  $\sigma^2$  és desconeguda i la mostra és gran ( $n \geq 30$ ) s'obté a partir de la fórmula

$$\left[ x - z \frac{S}{\sqrt{n}}, x + z \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si  $Z$  segueix una distribució normal  $(0,1)$ ,  $P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$ .

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$x - z \frac{S}{\sqrt{n}} = 5 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{250}} = 4.8141$$

i

$$x + z \frac{S}{\sqrt{n}} = 5 + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{250}} = 5.1859$$

L'interval de confiança demanat és  $[4.8141, 5.1859]$ .

b) Amb una confiança del 99% els extrems de l'interval seran

$$x - z \frac{S}{\sqrt{n}} = 5 - 2.58 \frac{1.5}{\sqrt{250}} = 4.7552$$

i

$$x + z \frac{S}{\sqrt{n}} = 5 + 2.58 \frac{1.5}{\sqrt{250}} = 5.2448$$

L'interval de confiança demanat és  $[4.7552, 5.2448]$ .

c) Els dos intervals són diferents perquè els nivells de confiança són diferents. Com és natural, en el segon cas que el nivell de confiança és més gran, l'interval que obtenim és també més gran. Tenim una confiança més gran que el valor real de la mitjana estarà entre els dos valors obtinguts però l'interval és més gran.

Puntuació: a) Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0.5, resultat final: 0.5. b) Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0.5, resultat final: 0.5. c) Justificació correcta: 0.5.