



## SÈRIE 5

### Exercici 1

1.1. Per trobar els punts de tall entre paràbola i hipèrbola, resollem l'equació  $f(x) = g(x)$ :

$$-x^2 + 5x = 8 - \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)(-x^2 + 5x) = 8x + 8 - 8$$

$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 8x$$

$$x(-x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Les solucions són  $x = 0$  i  $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ . Per tant, es tallen exactament en tres punts. Calculant les seves imatges, es tracta de  $(0, f(0)) = (0, 0)$ ,  $(1, f(1)) = (1, 4)$  i  $(3, f(3)) = (3, 6)$ .

1.2. Com que no hi ha més punts de tall que els tres calculats a l'apartat anterior, entre 1 i 3 les gràfiques no es toquen (de fet,  $f$  està per damunt de  $g$ ) i l'àrea demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^3 \left( -x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8 \ln(x+1) \right]_1^3 = \\ &= \left( -\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 24 + 8 \ln(4) \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 8 + 8 \ln(2) \right) = -\frac{26}{3} + 4 + 8 \ln(2) \\ &= 0.878 \dots \text{ u}^2. \end{aligned}$$



**Proves d'accés a la Universitat 2026, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

**1.3.** Efectivament  $f(x)$  té arrels als punts d'abscisses 0 i 5,  $f(0) = -0^2 + 0 = 0$  i  $f(5) = -5^2 + 25 = 0$ . La paràbola  $y = f(x)$  té el vèrtex situat al punt  $-2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ , que efectivament té per imatge  $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6,25$ .

A més,  $y = f(x)$  és l'única paràbola amb aquestes dues propietats ja que qualsevol que les compleixi haurà de ser de la forma  $f(x) = ax(x - 5)$ ; i com que el vèrtex ha d'estar al punt mig de les dues arrels  $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$  i ha de tenir imatge 6,25, tindrem

$$6,25 = f\left(\frac{5}{2}\right) = a \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 5\right) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -6,25 a.$$

Per tant  $a = -1$ , i l'única paràbola és  $f(x) = -1 \cdot x(x - 5) = -x^2 + 5x$ .

**Criteris de correcció: (1.1.)** Compteu 0,5 per plantejar i desenvolupar l'equació, i 0,25 pels punts de tall. **(1.2.)** Compteu 0,25 pel planteig correcte de l'àrea, 0,5 pel càlcul de la primitiva, i 0,25 pel resultat final. Penalitzeu 0,25 si resten les funcions al revés i/o donen com a bona una àrea negativa. **(1.3.)** Compteu 0,25 per la comprovació de les dues propietats demanades i 0,5 per la justificació que és l'única paràbola que les compleix.



## Exercici 2

2.1. El producte  $MN$  i el seu determinant donen

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3 & 3 \\ 3k-3-k+1 & k-1-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = 3k^2 + 6k - 9k - 18 - 6k + 6 = 3(k^2 - 3k - 4),$$

que és zero per als valors  $k = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1$ . Per tant, la matriu  $MN$  és invertible per a tot  $k$  excepte  $k = 4$  i  $k = -1$ .

2.2. El producte  $NM$  dona

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera columna és igual a la segona menys  $k$  vegades la tercera, el determinant és sempre zero i la matriu  $NM$  no és invertible per cap valor de  $k$ . Alternativament, es pot calcular el determinant i veiem que dona zero independentment de  $k$ :

$$\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(3k-3) \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3k-3)(-k-8+1+k-1+8) = 0.$$

2.3. En forma matricial es tracta del sistema d'equacions

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & m \\ k-1 & -1 & -1 & n \end{array} \right).$$

Com que  $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ , el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també, independentment dels tres paràmetres. I com que hi ha 3 incògnites, aquest sistema és compatible indeterminat per qualsevol valor de  $m$ , de  $n$  i de  $k$ .

**Criteris de correcció:** (2.1.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per donar la resposta correcta. (2.2.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 per argumentar que el determinant és sempre zero, i 0,25 per deduir la resposta correcta. (2.3.) Compteu 0,25 per interpretar el sistema d'equacions demanat, 0,5 per calcular els rangs, i 0,25 per donar la resposta correcta.



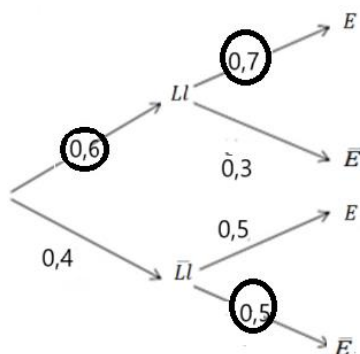
### Exercici 3

3.1. Considerem els successos aleatoris següents:

$LL$  = "llegir almenys dos llibres al mes",

$E$  = "fer un mínim de quatre hores setmanals d'esport".

Les dades del problema ens diuen que  $P(LL) = 0,6$ ,  $P(E|LL) = 0,7$ , i  $P(\bar{E}|\bar{LL}) = 0,5$ . Podem visualitzar-les en el diagrama d'arbre adjunt:



Pel teorema de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(LL) \cdot P(E|LL) + P(\bar{LL}) \cdot P(E|\bar{LL}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 = \\ &= 0,42 + 0,20 = 0,62. \end{aligned}$$

3.2. Per la fórmula de Bayes:

$$P(LL|\bar{E}) = \frac{P(LL \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|LL) \cdot P(LL)}{1 - P(E)} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{1 - 0,62} = 0,47 \dots$$



**3.3.** Cal trobar els valors màxim i mínim absoluts de la funció  $f(x) = 7 - x + \ln(2x - 1)$  en l'interval  $[1, 6]$ . La derivada de  $f(x)$  és  $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}$ , que s'anul·la només per  $x = \frac{3}{2}$ . Aquest punt crític es correspon a un màxim local, ja que la funció (a la vista del signe de la derivada) creix per  $x < \frac{3}{2}$  i decreix per  $x > \frac{3}{2}$ . Com que  $f(1) = 7 - 1 + \ln 1 = 6$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = 7 - \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 6,19$ , i  $f(6) = 7 - 6 + \ln 11 \approx 3,4$ , deduïm que el màxim i mínim absoluts de la funció a l'interval  $[1, 6]$  són als punts  $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6,19$  i  $f(6) \approx 3,4$ , respectivament. Per tant, segons aquest model, l'Alba ha practicat entre un mínim de 3,4 i un màxim de 6,19 hores per setmana d'esport.

**Criteris de correcció:** (3.1.) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per identificar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (3.2.) Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (3.3.) Compteu 0,25 per la derivada i per detectar que  $3/2$  és l'únic punt crític, 0,25 per les zones de creixement i decreixement, 0,25 per argumentar el màxim global, i 0,25 per argumentar el mínim global.



## Exercici 4

### OPCIÓ A.

**4.1.** Usarem l'expressió de la recta punt-pendent,  $y - f(x_0) = m(x - x_0)$ . Com que la recta buscada ha de passar pel punt  $x_0 = -1$ ,  $f(x_0) = -1$ , i ha de tenir pendent  $f'(x_0) = f'(-1) = 2$  (tal com es veu al gràfic), l'equació de la recta tangent a la funció  $f(x)$  en el punt  $x_0 = -1$  serà

$$y - (-1) = 2 \cdot (x - (-1)) \rightarrow y + 1 = 2 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2x + 1.$$

**4.2.** Els punts crítics de  $f(x)$  són aquells que satisfan  $f'(x) = 0$ . Del gràfic es veu clarament que són els punts  $x = -2$ ,  $x = 0$ , i  $x = 1$ : aquestes abscisses són possibles extrems relatius de la funció  $f(x)$ .

Com que  $f'(x)$  és creixent en  $x = -2$ , la seva derivada en aquest punt serà positiva,  $f''(-2) > 0$ , i això vol dir que  $x = -2$  és un mínim local de  $f(x)$ .

Anàlogament, com que  $f'(x)$  és positiva immediatament abans de  $x = 1$ , i negativa immediatament després, la funció  $f(x)$  és creixent abans de  $x = 1$  i decreixent després; per tant  $x = 1$  és un màxim local de  $f(x)$ .

El punt  $x = 0$  és diferent. Tant abans com després  $f'(x)$  és positiva per tant,  $f(x)$  és creixent en el punt  $x = 0$ . Però a més,  $f'(x)$  és decreixent abans de  $x = 0$  i per tant la seva derivada (és a dir,  $f''(x)$ ) és negativa, mentre que és creixent després de  $x = 0$  i per tant  $f''(x)$  és positiva. Això vol dir que la funció  $f(x)$  és convexa abans de  $x = 0$  i còncava després. Per tant, el punt  $x = 0$  és un punt d'inflexió de  $f(x)$ .

**4.3.** Com que  $f(x)$  és una primitiva de  $f'(x)$ , l'àrea que ens demanen és fàcil de calcular usant la regla de Barrow (i usant les dades  $f(0) = -0,2$  i  $f(-1) = -1$ ):

$$A = \int_{-1}^0 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^0 = f(0) - f(-1) = -0,2 - (-1) = 0,8 u^2.$$

**Criteris de correcció: (4.1.)** Compteu 0,5 per determinar el pendent de la recta tangent a partir del gràfic, i 0,5 per l'equació de la recta. **(4.2.)** Compteu 0,25 per la llista de punts crítics, 0,25 per deduir que  $x = -2$  és un mínim, 0,25 per deduir que  $x = 1$  és un màxim, i 0,25 per deduir que  $x = 0$  és un punt d'inflexió. **(4.3.)** Compteu 0,25 per reconèixer que  $f(x)$  és una primitiva de  $f'(x)$ , i 0,25 pel càlcul de l'àrea.



## OPCIÓ B.

4.1. Calculem la distància entre els punts  $A(1, 2, 3)$  i  $B(5, 3, 7)$ :

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \|(4, 1, 4)\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33} \approx 5,74 \text{ cm.}$$

Per tant, el sensor ha recorregut 5,74 cm.

4.2. Hem de calcular la distància del punt  $B$  al pla  $\pi$ ,  $d(B, \pi)$ . Per fer-ho, necessitem l'equació general del pla:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-6-(y-1) = 0 \Leftrightarrow x-y-5 = 0.$$

Aplicant la fórmula de la distància punt-pla, obtenim

$$d(B, \pi) = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12 \text{ cm.}$$

4.3. Per trobar el punt de xoc, hem de buscar el punt de tall del pla  $\pi$  amb la recta que passa per  $A$  i per  $B$ . Primer explicitem l'equació d'aquesta recta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 1, 4) = (1 + 4\lambda, 2 + \lambda, 3 + 4\lambda),$$

i ara busquem el punt en comú imposant l'equació del pla:

$$1 + 4\lambda - (2 + \lambda) - 5 = 0,$$

d'on  $3\lambda - 6 = 0$  i  $\lambda = 2$ . Això vol dir que el punt de xoc és

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + 2(4, 1, 4) = (9, 4, 11).$$

**Criteris de correcció: (4.1.)** Compteu 0,5 pel càlcul de la distància entre els dos punts.

**(4.2.)** Compteu 0,5 per trobar l'equació general del pla i 0,5 pel càlcul de la distància.

**(4.3.)** Compteu 0,5 per l'equació de la recta i 0,5 pel càlcul del punt intersecció.