



SÈRIE 4

1. a) El domini d'aquesta funció és

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x^3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \\ &= [-1, +\infty). \end{aligned}$$

Com que $f(0) = \sqrt{1 + 0^3} = 1$, el tall d'aquesta funció amb l'eix d'ordenades és al punt $(0,1)$. Els talls amb l'eix d'abscisses corresponen a les solucions de l'equació $f(x) = 0$, que són

$$\sqrt{1 + x^3} = 0 \rightarrow 1 + x^3 = 0 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x = -1.$$

Per tant, es tracta només del punt $(-1, 0)$.

b) La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$, i l'equació de l'enunciat és $\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = 0$. Aïllant, ens queda $3x^2 = 0$ i, per tant $x = 0$. L'únic candidat a extrem dins l'interior del domini és, doncs, el punt $x = 0$. Ara bé, la funció derivada és positiva, $f'(x) \geq 0$, per que es tracta d'una fracció entre nombres sempre positius. Això vol dir que f és una funció creixent en tot el seu domini $[-1, \infty)$. Per tant, aquesta funció no té cap màxim ni mínim locals.

c) El punt de tangència $(a, 3)$ està sobre la gràfica de la funció i, per tant, compleix

$$f(a) = \sqrt{1 + a^3} = 3 \rightarrow 1 + a^3 = 9 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Aquesta recta tangent tindrà pendent $m = f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{12}{6} = 2$. Per tant, es tracta de

$$y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 1.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per la determinació del domini de la funció, i 0,25 pel càlcul dels punts de tall. (b) Compteu 0,25 pel càlcul de la derivada, 0,25 per als punts crítics, 0,25 per determinar que no hi ha màxims ni mínims locals, i 0,25 per reconèixer que es tracta d'una funció creixent. (c) Compteu 0,5 punts per determinar l'abscissa del punt de tangència i 0,5 pel càlcul de la recta tangent.

2. a) Comencem calculant el determinant de la matriu de coeficients del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6a - 6a - (-6a^2 + 6 - 6) = 6a^2 - 6 \\ = 6(a^2 - 1).$$

Clarament s'anul·la només quan $a = \pm 1$. Per tant si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el rang de la matriu de coeficients és 3, el rang de la matriu ampliada també i, com que tenim tres incògnites, és un sistema compatible determinat.

Per al cas $a = 1$ tenim el sistema d'equacions:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li restem la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Clarament, veient la tercera equació, es tracta d'un sistema incompatible.

Finalment, per al cas $a = -1$ tenim el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Tornem a fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li sumem la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Ara està clar que els rangs de les matrius de coeficients i ampliada són ambdós 2 i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Per al cas $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el sistema ens ha donat compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans π_1 , π_2 i π_3 es tallen en un sol punt comú.



Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Per al cas $a = 1$ el sistema és incompatible i, per tant, els tres plans a la vegada no s'intersequen. Clarament, π_1 i π_3 són plans paral·lels (per que els vectors $(1, 3, 1)$ i $(1, 3, 1)$ són proporcionals) i π_2 és un pla secant als dos anteriors.

Finalment, per al cas $a = -1$, tenim que $\pi_1 = \pi_2$ (les equacions són proporcionals) i π_3 és un pla secant a l'anterior; per tant, la intersecció dels tres és una recta.

c) Pel que hem vist a l'apartat anterior l'únic cas en què la intersecció dels tres plans és una recta és per $a = -1$. Resolem el sistema aprofitant els càlculs de l'apartat (a). Tenim $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ i $x + 3\frac{2}{3} - z = 1$, per tant, $x = z - 1$. Les solucions, i per tant els punts de la recta en qüestió són de la forma $(x, y, z) = \left(z - 1, \frac{2}{3}, z\right) = \left(-1, \frac{2}{3}, 0\right) + z(1, 0, 1)$. D'aquí veiem que $\left(-1, \frac{2}{3}, 0\right)$ és un punt d'aquesta recta i $(1, 0, 1)$ n'és un vector director.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per la discussió de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0,25 per interpretar la posició relativa en cadascun dels tres casos. (c) Compteu 0,25 per agafar el valor adequat del paràmetre, 0,25 per resoldre el sistema, i 0,25 per deduir un punt i un vector director.

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$B = \text{"rebre un correu brossa"}, \\ CB = \text{"rebre un correu a la carpeta de correu brossa"}.$$

Segons les dades de l'enunciat tenim que $P(B) = 0,25$, $P(\bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$, $P(CB | B) = 0,95$, i $P(\bar{CB} | \bar{B}) = 0,9$. Per la llei de la probabilitat total,

$$P(CB) = P(CB | B) P(B) + P(CB | \bar{B}) P(\bar{B}) = 0,95 \cdot 0,25 + (1 - 0,9) \cdot 0,75 = 0,3125.$$

b) Cal calcular $P(\bar{B} | CB)$. Per la fórmula de Bayes:

$$P(\bar{B} | CB) = \frac{P(\bar{B} \cap CB)}{P(CB)} = \frac{P(CB | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{0,3125} = \frac{0,1 \cdot 0,75}{0,3125} = 0,24.$$

S'hi trobarà un 24% dels correus que no són brossa.

c) Calculant la funció de l'enunciat, la probabilitat de rebre almenys dos correus en menys de t minuts és

$$F(t) = \int_0^t A e^{-0,5x} dx = \left[\frac{A}{-0,5} e^{-0,5x} \right]_0^t = \frac{A}{-0,5} (e^{-0,5t} - 1) = 2A(1 - e^{-0,5t}).$$



Imposant el valor de $F(2)$ que ens donen, trobem $2A(1 - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$, d'on resulta $A = 0,5$.

Criteris de valoració: (a) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per identificar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (c) Compteu 0,5 per al càlcul explícit de $F(t)$, 0,25 per imposar $F(2)$, i 0,25 pel càlcul final.

4. OPCIO A. a) Com que el volum de la part cilíndrica ha de ser de 100 cm^3 , tenim que $\pi r^2 h = 100$ i per tant $h = \frac{100}{\pi r^2}$. La superfície total de l'ampolla s'obté sumant la superfície de la base, πr^2 , la superfície lateral del cilindre, $2\pi r h$, i la superfície de la mitja esfera superior, $\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi r^2$; per tant, és

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si substituïm h per l'expressió que tenim en funció de r , obtenim la funció

$$S(r) = 3\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

b) Busquem ara el mínim d'aquesta funció calculant la seva derivada:

$$S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2}.$$

Igualant-la a zero, $S'(r) = 0$, obtenim

$$6\pi r - \frac{200}{r^2} = 0,$$

$$6\pi r = \frac{200}{r^2},$$

$$r^3 = \frac{100}{3\pi},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \simeq 2,2 \text{ cm}.$$



Per verificar que es tracta d'un mínim podem utilitzar la segona derivada

$$S''(r) = 6\pi + \frac{400}{r^3},$$

que és clarament positiva per a qualsevol r positiu. Per tant, per a $r = 2,2 \text{ cm}$ l'ampolla té superfície total mínima. En aquest cas tenim $h = \frac{100}{\pi \cdot 2,2^2} = 6,6 \text{ cm}$ i la superfície total mínima és de $S(2,2) = 3\pi \cdot 2,2^2 + 2\pi \cdot 2,2 \cdot 6,6 \simeq 136,8 \text{ cm}^2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la lligadura donada pel volum i 0,5 pel càlcul correcte de la fórmula de l'àrea total. (b) Compteu 0,5 punts pel càlcul de la derivada, 0,25 per trobar el valor de r , 0,25 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per donar la resposta completa (dimensions i àrea total).

4. OPCIO B. a) Tenim

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2 + a^2 & 4a^2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ a + 4 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les matrius A i B commuten si i només si $2 + a^2 = a + 4$, és a dir, si i només si $a^2 - a - 2 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$. Per $a = 2$ la matriu A coincideix amb B , i per $a = -1$ obtenim $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$. Tenim

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3.$$

Per tant la matriu A és invertible si i només si $a \neq 0$.



c) Que $A = A^{-1}$ és el mateix que dir $AA = Id$. Imposant aquesta igualtat,

$$AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 + a & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenim les equacions $a^2 = a^4 = 1$ i $a^2 + a = 0$. Les dues primeres equacions es compleixen per $a = 1$ i per $a = -1$, i la tercera per $a = -1$ i per $a = 0$. Per tant, $A^{-1} = A$ si i només si $a = -1$. Alternativament es pot calcular la matriu inversa,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix};$$

i, imposant que coincideixi amb la matriu A , obtenim les equacions $a^2 = 1$, $a^3 = -1$, i $a^4 = 1$, que tenen per solució $a = -1$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel càlcul de AB , 0,25 pel càlcul de BA , i 0,25 per resoldre l'equació i donar la resposta. (b) Compteu 0,25 pel càlcul del determinant i 0,5 per la resposta justificada. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de AA (o de A^{-1}), 0,25 per plantejar les equacions a resoldre, i 0,25 per la resposta. Si donen com a respostes vàlides totes les solucions parcials $a = 1, -1, 0$, compteu només els 0,5 punts del càlcul de A^2 (ó A^{-1}).